10. SKスピングラスモデルにおけるultradiffusion(基研短期研究会「スピングラスを中心とした新しい秩序相」報告,研究会報告)

根本, 幸児

10．ＳＫスピングラスモデルにおけるultradiffusion

基研・根本幸児

1．序

スピングラス（ＳＧ）の磁気緩和に限らず様々な系において、引き延ばされた指数関数や巾関数などに代表される異常長緩和が観測され、議論されている。直観的には、「自由エネルギー」に多くの引っかかりがあって「最終的な平衡状態」にたどり着くには「異常」に時間がかかるということになろうか。要するに様々な緩和時間を持つような機構が存在して、見かけ上その重ね合わせとして異常長緩和現象が起こると考えられる。ＳＧでのその機構として、実スピン空間におけるクラスター効果（またはドロップレットその他）の形成が挙げられる。いろいろな大きさ、形のスピンクラスターが存在していれば、それに応じて多様な緩和スペクトルが得られると言う訳である。一方、位相空間（自由エネルギー空間）の構造に視点を取ることもできる。複雑な起伏を持つ空間中を系が運動していると考えた時、その緩和は単純なものではないことは先に述べた通りである。この二つはある意味においては互いに表裏の関係にあるといえよう。ここでは後者の視点から長緩和の機構を考えてみる。

イジングＳＧの平均場模型（所謂ＳＫ模型）では、ＳＧ相において多様な準安定状態が存在することが知られている［１］。すなわち、自由エネルギー空間に多くの極小点が現れる。しかもそれらが階層的に構成されているというのである。もちろん平均的にという注釈がつくが、ランダム系がその平均的振舞いとして階層性を持つという考えは興味深い。そこで、階層的に構成された位相空間中で系の緩和がどの様になるかを考えようというのがここでのテーマである。

［題目にあるultradiffusionという名称は一般的ではないが、ultrametric な空間（≒階層的な空間）における拡散という意味で用いている］

2．準安定状態のネットワーク［２］

緩和機構としては、系が各準安定状態の間を熱的なバリアホッピングによって移り変わることを考える。これは特に低温領域ではよい近似となると期待される。

十分低温では、状態を移るとき越えなければならない最低のバリアが実質的な遷移過程を支配すると考えてよいであろう。ここではさらに簡単化して、バリアホッピングがエネルギーにのみ依存し、エントロピーの効果を無視できるとする。SK模型を例にとると、「1スピン反転に対して安定なスピン配位」を準安定状態とし、その間の遷移を議論することになる。さてこの時、状態間を結ぶ経路を「1スピン反転によって位相空間をたどる道筋」と定義しよう。一つの経路の中での最高のエネルギーをその経路のコストとすれば、最もコストの低い経路のみを通して遷移が起こると考えられる。そこでこの状況での緩和を議論するには、準安定状態とそれらを結ぶ経路、すなわちネットワークだけを考慮をすればよいことになる。このようなネットワークは一般にループを持たない。今仮にa，b，cの3状態をとってきて、それらの間の最低コスト（バリア）をE_{ab}, E_{bc}, E_{ca}（$E_{ab} < E_{bc} < E_{ca}$）とする（図1）。

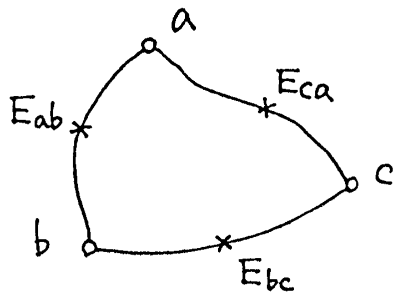


図　1

ところでE_{ca}が最低コストというのは明らかに嘘である。c－a間を直接結ぶ経路よりもc－b－aとたどる経路の方がコストが低いからである。このようにループを持たないネットワークによって最低コストの経路が表現されていれば、状態間のバリアエネルギーを木のグラフ（あるいは家系図もどき）として書くことができるが、これは階層構造の表現にほかならない。この考えにしたがってSK模型のあるサンプルについて木構造を表わしたのが図2である。縦軸にエネルギーがとってあり、それぞれの下端に状態がぶら下がっている。このように考えると、準安定状態が多数存在すれば、バリアエネルギーに関してはごく自然

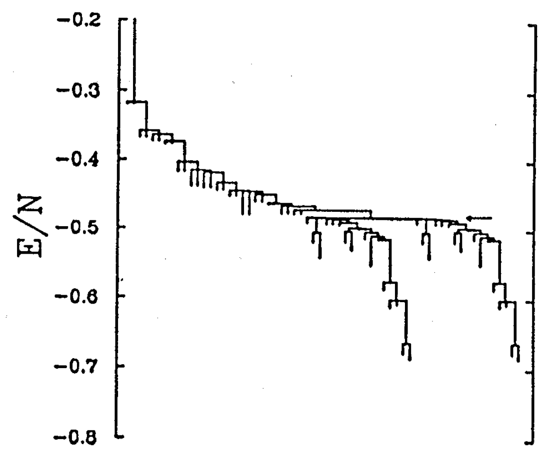


図　2

に階層性が現われることになる。

3. Grauber 方程式と木構造における遷移確率

ここで議論するのは、系がa状態に存在する確率p_aの時間変化である。これは次のGlauber 方程式に従うとする。

$$(1)\qquad dp_a/dt = \sum_{b\neq a} W_{ab}\,p_b - \sum_{b\neq a} W_{ba}p_a$$

ここでW_{ba} はa状態からb状態へ単位時間あたり遷移する確率である。今の場合E_aをa状態のエネルギー、E_{ab} をa－b状態間の最低バリアエネルギーとして

$$(2)\qquad W_{ba} = \tau_0^{-1}\exp\{-\beta(E_{ab}-E_a)\}$$

とするのが自然であろう（ここでβは温度の逆数）。この遷移確率はもちろん詳細釣合を満たしているので

$p_a(t\to\infty)=p_a^{eq}\propto\exp(-\beta E_a)$

が期待される。方程式が線形なので一般解は

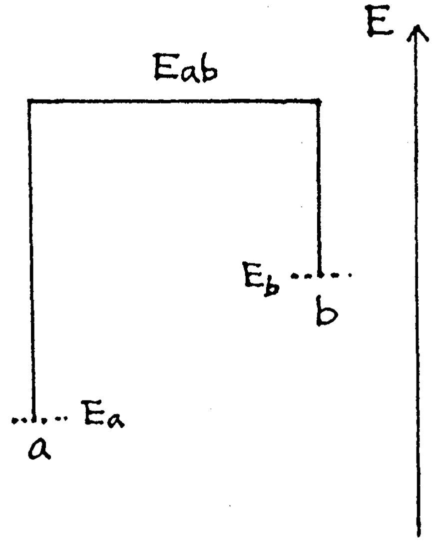


図 3

$$(3)\qquad p_a(t) = \sum_b G_{ab}(t)\,p_b(t=0)$$

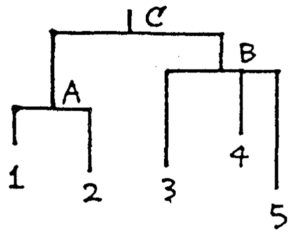
とかける。$G_{ab}(t)$はt=0 でb状態にいたとき、時刻t でa状態にいる確率である。そこで緩和関数を

$$(4)\qquad C(t) = \sum_a \{G_{aa}(t) - G_{aa}(t=\infty)\}\,p_a^{eq}$$

と定義する。この意味は説明の要がないであろう。このC(t)のtの大きい漸近的振舞いがここでの議論の対象である。

一般の遷移確率を仮定して緩和関数を計算するのはもちろん大変であるが、木構造に従ったバリアエネルギーを仮定すると当然方程式も階層構造を持つことに

なる。（２）式をみると、遷移確率はバリアエネルギーのボルツマン因子と状態のそれ（の逆数）との積の形をしているので、行列表現の積として書いたのが図４である。この行列は階層構造を反映した形となっているので、レプリカ法におけるパリシ行列の表現を利用できる可能性が期待できる。



のとき

$$W_{ab}=\frac{1}{\tau_0}\left(\begin{array}{cc|ccc} \times & e^{-\beta E_A} & & e^{-\beta E_C} & \\ e^{-\beta E_A} & \times & & & \\ \hline & & \times & & e^{-\beta E_B} \\ e^{-\beta E_C} & & & \times & \\ & & e^{-\beta E_B} & & \times \end{array}\right)\times\left(\begin{array}{ccccc} e^{\beta E_1} & & & & \\ & e^{\beta E_2} & & 0 & \\ & & e^{\beta E_3} & & \\ & 0 & & e^{\beta E_4} & \\ & & & & e^{\beta E_5} \end{array}\right)$$

対角成分（×）は列の和が０になるように決められる（確率保存）

図　４

４．どんな木構造について計算されているか

それではこれまでにどのような場合に緩和関数が計算されているのだろうか。（ａ）まず、表式としてきれいにまとまっているのは、すべての状態が等しいエネルギーを持っている場合である［３］。この場合、分岐点に付随した縮退があるので緩和時間のスペクトルの表示が著しく簡単になる。この表式を用いて、「きれいな」木構造（自己相似な木）の場合の緩和関数などが計算され、エネルギーバリアが階層に対して等間隔であれば、巾緩和となることなどが示されている。

（５）　$C(t)\sim t^{-\nu}$

もっとも自己相似な木構造の場合は以前から知られていたことだが、重要なことは、そのべきが「世代」に対する「人口増加率」に強く支配され、その結論はノイズ（木構造のきたなさ、あるいは不揃いさ）に対してかなり頑健であることが示された点である。またこのような場合、低温でのべきの温度依存性は線形である。すなわち$\nu \propto T$。

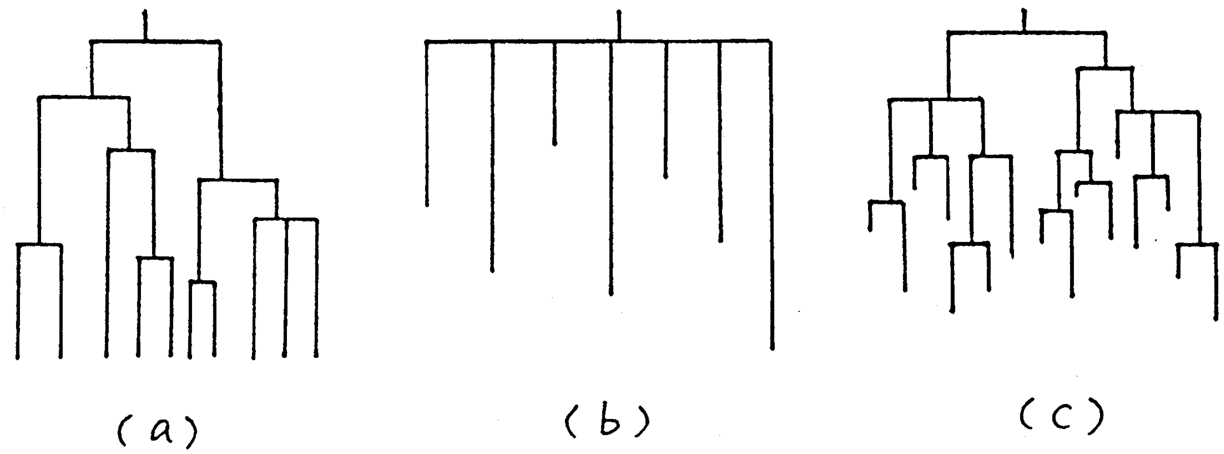


図　5

（ｂ）もう一つ重要と思われる結果は、分岐点が一つで状態のエネルギーが任意の場合である［４］。この場合、エネルギー分布が指数関数にしたがう「ランダムエネルギー模型」的なものとすればやはりべき緩和となることが示されている。またこの場合でも、そのべきは温度に対して線形である($\nu \propto T$)。

（ｃ）それでは、分岐点（バリア）、状態のエネルギーがともに任意の場合はどうであろうか。実際ＳＫ模型ではこの場合に解くことが必要なのだが、残念ながらランダム平均をとるところまでには至っていないのが現状である。ここで詳しく示す余裕はないが一般的な表式は再起的表現として与えることができる［５］。ここでいう再帰的表現とは（３）式のGを入れ子の内側から順に解決することに相当している。しかしこの表式から木構造とエネルギー分布の特徴がどの様に緩和関数に反映されるかを引き出すことは現在検討中の課題である。予想としては、（ａ）、（ｂ）の混合として考えると、バリアエネルギーの分布で比較的密度の高いところから引き延ばされた指数関数が、準安定状態のエネルギー分布から巾関数が導かれるかも知れないという感覚はあるが、その温度依存性などはまだな

んともいえないというところである。

5．まとめ

どうも現状報告のみで結果がでていない話になり恐縮ですが、問題としている興味の対象を知っていただければ幸いです。

6．参考文献

[1] レビューとして K. Binder and A.P. Young, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 765; M. Mezard, G. Parisi and M.A. Virasoro, "Spin Glass Theory and Beyond" (World Scientific 1987, Singapore)

[2] 2節の詳細は K. Nemoto, to appear in J. Phys. A とその中の文献を参照して下さい。

[3] C.P. Bachas and B.A. Hubermann, J. Phys. A20 (1987) 4995

[4] G.J.M. Koper and H.J.Hilhorst, Europhys. Lett. 3 (1987) 1213

[5] K. Nemoto, in preparation